

14/4/21

Μοντέλο Einstein Σιδιού - Ισχυριότητα : Υπερρεlativistic φαινόμενα

Minkowski Νευτώνια μηχανική

κάθε σωμα περιγράφεται από 4 συνιστες $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$
 χώρος χρόνος

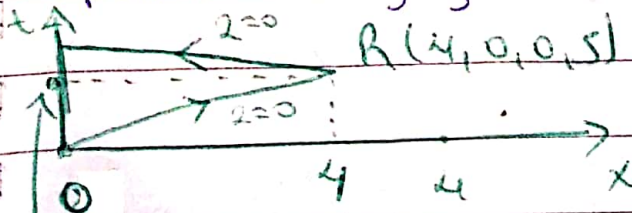
Χώρο - χρόνος

$$\langle (x, y, z, t), (x', y', z', t') \rangle = -x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + t \cdot t'$$

$$\| (x, y, z, t) \| = \sqrt{\langle (x, y, z, t), (x, y, z, t) \rangle} \geq 0$$

$$\| u - v \| = \sqrt{-(x - x')^2 - (y - y')^2 - (z - z')^2 + (t - t')^2}$$

Υποθέτουμε ότι γεννιούνται 2 δίδυμα. Το ένα περιμένει στη Γη αμίνιτο ενώ το άλλο επιβιβάζεται σ'έναν πυραύλο (0.8 ως ταχύτητας του φωτός) γράνει στον Άλφα του Κενταύρου και αμέσως επιστρέφει στη Γη. Θεωρούμε ότι ο Άλφα του Κενταύρου βρίσκεται πάνω στον άξονα x. Η απόστασή του από τη Γη είναι 4 έτη φωτός.

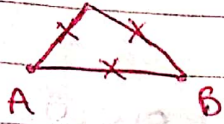


1=0 όταν επιστρέφει ο αδελφός το 5 έτη

Το 1=0 βλέπει 4 έτη να πλεί στο R και 4 να γυρνάει. Απόσταση 8 έτη φωτός = 10 έτη 0.8 ως ταχύτητας του φωτός

Να υπολογίσουμε την απόσταση $\|O, B\| = \|R, Q\| = \|O - R\| = \|R - Q\| =$
 $= \sqrt{1 - (4-0)^2 - (0-0)^2 - (0-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{-16+25} = 3 \text{ cm}$

Άρα το 2^ο παιδί θα γράψει στο θ μετά από $3+3 \text{ cm} = 6$
 Το ηρώδιο θα είναι 10 cm ενώ το δεύτερο 6 cm



Πραγματικούς Συμμετρικούς Πινάκες

Ορισμός 1) Ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας A καλείται συμμετρικός αν $A = A^t$ ($a_{ij} = a_{ji}$)

2) Ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας A καλείται ερμιτιανός αν $A = \bar{A}^t$ ($a_{ij} = \bar{a}_{ji}$)

Πρόταση: Το σύνολο των συμμετρικών πινάκων $\Sigma(n, \mathbb{R})$, αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $M(n \times n, \mathbb{R})$

$$\begin{cases} (A+B)^t = A^t + B^t = A+B \\ (AB)^t = B^t A^t = BA \end{cases}$$

Ορισμός: Δύο συμμετρικοί πίνακες A και B θα καλούνται ορθογώνια όμοιοι αν υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P ώστε:
 $A = P B P^t$ ή $B = P A P^t$

Πρόταση: Οι ιδιοτιμές ενός πραγματικού ερμιτιανού πίνακα A είναι όλες πραγματικές

Απόδ.

Έστω λ ιδιοτιμή του A και u ιδιοδιάνυσμα, το πράττουμε σαν στήλη $Au = \lambda u$. Θέλουμε $\lambda = \bar{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$, πολλαπλασιάζουμε

$$Au = \lambda u \Rightarrow \bar{A}u = \bar{\lambda} \bar{u} \Rightarrow \bar{A} \bar{u} = \bar{\lambda} \bar{u} \Rightarrow u^t \bar{A} \bar{u} = u^t \bar{\lambda} \bar{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^t A \bar{u} = \bar{\lambda} u^t \bar{u}$$

$$Au = \lambda u \Rightarrow (Au)^t = (\lambda u)^t \Rightarrow u^t A^t = \lambda u^t \Rightarrow u^t A = \lambda u^t \Rightarrow$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\bar{u}$

$$\Rightarrow u^t A \bar{u} = \lambda u^t \bar{u} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \bar{\lambda} u^t \bar{u} = \lambda u^t \bar{u} = 0 \quad (\bar{\lambda} - \lambda) u^t \bar{u} = 0, \\ u \neq 0 \Rightarrow \lambda - \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \end{array} \right\}$$

$A \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad Au_1 = \lambda_1 u_1, \quad Au_2 = \lambda_2 u_2 \Rightarrow u_1 \text{ και } u_2 \text{ γραμμικά ανεξάρτητα}$

Πηλημα: Έστω $A = A^t$ (πραγματικός συμμετρικός) Τότε σε διαδοχικούς ιδιοτιμές αντιστοιχούν ορθογώνια ιδιοδιανύσματα

Απόδ:

$$\begin{aligned} \text{Έστω } Au_1^t &= \lambda_1 u_1^t \text{ και } Au_2^t = \lambda_2 u_2^t \text{ με } \lambda_1 \neq \lambda_2. \text{ Θα δείξουμε} \\ \langle u_1, u_2 \rangle &= 0 \Leftrightarrow u_1 u_2^t = 0 \Rightarrow (Au_2^t)^t = (\lambda_2 u_2^t)^t \Rightarrow \\ Au_2^t &= \lambda_2 u_2^t \Rightarrow u_2 A u_1^t = u_2 \lambda_1 u_1^t \Rightarrow (u_2^t)^t A^t = \lambda_1 (u_2^t)^t \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_2 u_2 u_1^t &= \lambda_1 u_2 u_1^t = (\lambda_2 - \lambda_1) (u_2 u_1^t) = 0 \quad u_2 A = \lambda_2 u_2 \quad (+) \\ \Rightarrow u_2 u_1^t &= 0 \Rightarrow \langle u_2, u_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle u_1, u_2 \rangle = 0 \Rightarrow u_1 \perp u_2 \text{ ή } u_1 \parallel u_2 \\ &\lambda_2 \neq \lambda_1 \end{aligned}$$

Φαινομενικό Θεώρημα Πραγματικών Συμμετρικών Πινάκων (Spectral Theorem)

Κάθε πραγματικός συμμετρικός πίνακας είναι ορθογώνια όμοιος με έναν διαγώνιο. Δηλ. υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P και διαγώνιος Λ ώστε $A = P \Lambda P^t$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι στήλες του P είναι τα ορθοκανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του A και Λ ο διαγώνιος που δημιουργείται από τις ιδιοτιμές του.

Π.χ: Να διαγωνοποιώσετε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Παρατηρούμε ότι $A = A^t$, άρα διαγωνοποιείται

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & 2 & 2 \\ 8-\lambda & 4-\lambda & 2 \\ 8-\lambda & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (8-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (8-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (8-\lambda)(2-\lambda)^2 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 8$$

$$V(2): (A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 0 \\ 2 &= -x - y \\ 2 &= -x - y \end{aligned}$$

$$\text{Τυχαιο ιδιοδιάνυσμα του } A: (x, y, -x-y) = (x, 0, -x) + (0, y, -y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$$

$$V(2) = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$$

Παρατηρούμε ότι $u_1 \perp u_2$. Θα τα κανονίσει κάθετο με $G-S$

$$u_1 = v_1 = (1, 0, -1)$$

$$v_2 = u_2 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = (0, 1, -1) - \frac{1}{2} (1, 0, -1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right) \Rightarrow \sqrt{6} \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right) = v_2'$$

$$V(2) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, 2, -1) \right\rangle$$

$$V(8): (A - 8I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$y = 2x - z$$

$$x - 4x + 2z + z = 0 \Rightarrow -3x + 3z = 0 \Rightarrow x = z \quad x = y = z$$

Τυχαιο $(x_1, x_2, x_3) = x(1, 1, 1) \Rightarrow v(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$. Παρατηρούμε

ότι $v(0) \perp v(2)$ $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ορθογώνιος

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα } A = P \Lambda P^t$$

Πρόταση: Οι ιδιοτιμές διαφορετικών ιδιοτιμών ενός γραμμικού πίνακα είναι κότες μεταξύ τους

Θεώρημα: Αν ο A είναι γραμμικός πίνακας, το επόμενο είναι ισοδύναμο:

- 1) Ο A είναι ορθογώνιος όμοιος με διαγώνιο πίνακα
- 2) Ο A $+$ $-I$ - σπινευτός
- 3) Ο A έχει ορθοκανονικά διάνοια από η ιδιοδιάνοια

Απόδ.

1) $\Rightarrow$ 2) 1) Πέει ότι $\exists P$ ορθογώνιος και Λ διαγώνιος με $A = P \Lambda P^t \Rightarrow A^t = (P \Lambda P^t)^t = (P^t)^t \Lambda^t P^t = P \Lambda P^t = A$

2) $\Rightarrow$ 3) Από το γραμμικό θεώρημα για γραμμικούς σπινευτούς πίνακες.

3) $\Rightarrow$ 1) 3) Πέει ότι υπάρχουν η ορθοκανονικά ιδιοδιάνοια. Ανασυνθέτουμε τον P να έχει στήλες αυτές τις ιδιοδιάνοια και Λ τον διαγώνιο με τις ιδιοτιμές τους. Τότε ο A διαγωνοποιείται (γιατί έχει η σπ. ανεξ.) (επειδή είναι ορθογώνιος) ιδιοδιάνοια) και $A = P \Lambda P^t$

Π.χ. 1) Αν u είναι διάνυσμα στήλη, $u \in M(n \times 1, \mathbb{R})$, να δείξετε ότι ο πίνακας $I - uu^t$ είναι συμμετρικός οπότε διαγωνοποιείται

$$\underbrace{u u^t}_{n \times n} \Rightarrow \text{Ορίζεται η διαμορφή } I - uu^t \in M(n \times n, \mathbb{R})$$

$$(I - uu^t)^t = I^t - (uu^t)^t = I - (u^t)^t u = I - uu^t$$

2) Να δείξετε ότι $A = I - uu^t$ όπου $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ και $u \in M(n \times 1, \mathbb{R})$. Αποδείξτε να τον διαγωνοποιήσετε

$$A = I - uu^t \Rightarrow \text{Πρέπει να βρούμε τη στήλη } u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$uu^t = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} (a, b, \gamma) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & a\gamma \\ ba & b^2 & b\gamma \\ a\gamma & b\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

$$(uu^t) = I - A \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab & a\gamma \\ ba & b^2 & b\gamma \\ a\gamma & b\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \quad ab = -1 \quad \text{Από το } a \text{ και } b \text{ έχουν}$$

$$b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \quad \text{αντίθετα πρόσημα. Το}$$

$$\gamma^2 = 1 \Rightarrow \gamma = \pm 1 \quad \text{ίδιο και για } a \text{ και } \gamma.$$

$$a = \pm 1 \Rightarrow b = \mp 1 \quad u = (-1, 1, 1) \text{ ή } u = (1, -1, -1)$$

Να διαγωνοποιήσουμε τον A ο οποίος είναι πραγματικός συμμετρικός

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_1} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1-\lambda)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= (1-\lambda)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \det \begin{pmatrix} -\lambda-1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= (1-\lambda)^2 \det \begin{pmatrix} -\lambda-2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 (-\lambda-2)
 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$V(-2) = (A + 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + y + z = 0 \Rightarrow 2x + y + x + 2y = 0$$

$$x + 2y - z = 0 \Rightarrow z = x + 2y$$

$$x - y + 2z = 0 \quad 3x + 3y = 0 \Rightarrow y = -x, z = -x$$

$$\text{Τύπος } (x, -x, -x) = x(1, -1, -1) \quad V(-2) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1) \right\rangle$$

$$V(1) : (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + y + z = 0 \quad x = y + z$$

$$x - y - z = 0$$

$$x - y - z = 0$$

$$\text{Τύπος } (y+z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$$

$$V(1) = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle \quad \delta\epsilon\iota\ \epsilon\iota\varsigma\alpha\iota\ \sigma\beta\omicron\upsilon\lambda\omicron\upsilon\mu\epsilon\iota$$

$$V(1) \perp V(-2) \text{ - Εξαγωγίζουμε } G-S \quad u_1 = (1, 1, 0) \\ u_2 = (1, 0, 1)$$

$$v_1 = u_1 = (1, 1, 0)$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = (1, 0, 1) - \frac{1}{2} (1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow (1, -1, 2) = v_2'$$

$$V(1) = \langle (1, 1, 0), (1, -1, 2) \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}} (1, -1, 2) \rangle$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \Lambda P^t$$

$$Au = \lambda u \quad : \lambda \text{ ιδιοτιμή} \\ u \neq 0 \text{ , ιδιοδιάνυσμα} \\ tu \quad + - \\ t \neq 0$$

$$A(tu) = \lambda(tu)$$

$$Av = \lambda v$$